Introduction

L'objectif est de présenter les principaux théorèmes permettant **de réduire ou de simplifier les calculs sur les circuits électriques**. Ces théorèmes et méthodes d'étude ne sont valables que pour des réseaux linéaires.

Définitions utiles (1)

- Un fil est une résistance quasiment nulle. Placé en série, un fil ne modifie pas la résistance mais placé en parallèle, il court-circuite la résistance.

- Un interrupteur ouvert est équivalent à une résistance infinie. Placé en parallèle, il ne modifie rien mais en série, cela revient à supprimer la branche étudiée.

- Un nœud est un point de jonction de plusieurs conducteurs.
- Une branche est une portion de circuit entre 2 nœuds.

Définitions utiles (2)

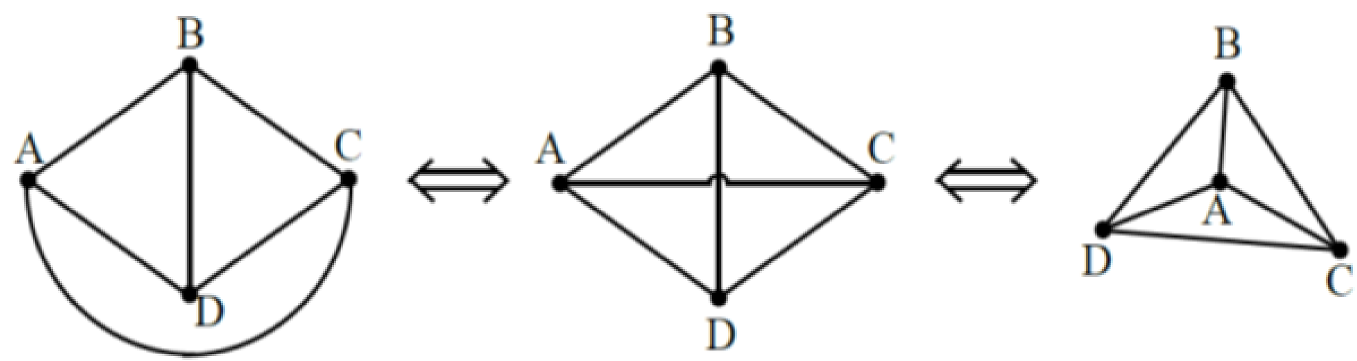
- Une maille est un parcours fermé constitué de branches et ne passant qu'une seule fois par un nœud donné.

Une maille est dite indépendante si une ou plusieurs branches lui appartiennent exclusivement. La maille indépendante est forcément adjacente à au moins une autre maille. **Dans ce cas si un réseau comporte N nœuds et B branches, il comporte alors M mailles indépendantes** :

$$\boxed{\boldsymbol{M = B - N + 1}}$$

Définitions utiles (3)

- Un graphe est un schéma représentatif de la topologie du réseau (nature et nombre d'interconnexions) indépendamment de sa forme réelle.



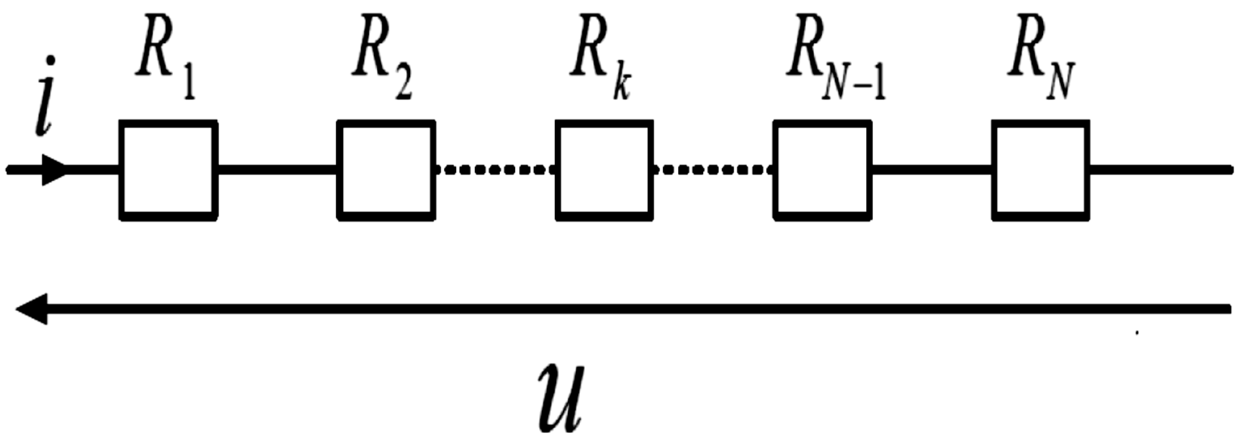
- Passiver (ou éteindre) une source revient à la remplacer par sa résistance interne. Autrement dit, ceci revient à court-circuiter les sources de tension et à ouvrir les sources de courant.

Définitions utiles (4)

- Eteindre une source de tension idéale est équivalent à un interrupteur fermé (fil).
- Eteindre une source de courant idéale est équivalent à un interrupteur ouvert.
- Tous les dipôles en parallèle avec une source de tension idéale peuvent être enlevés. En effet, le générateur idéal de tension impose la tension à ses bornes quels que soient les dipôles reliés à ces mêmes bornes
- Tous les dipôles en série avec une source de courant idéale peuvent être enlevés. En effet, le générateur idéal de courant impose la tension à ses bornes quels que soient les dipôles en série avec lui,

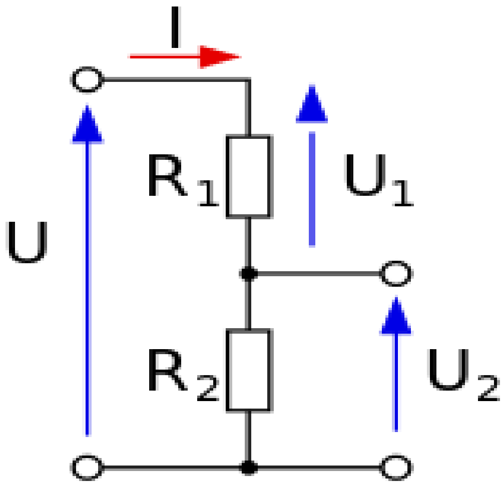
Pont diviseur de tension (1)

Ce principe est utilisé pour calculer des tensions aux bornes des dipôles placés en série (**donc tous parcourus par la même intensité I**).



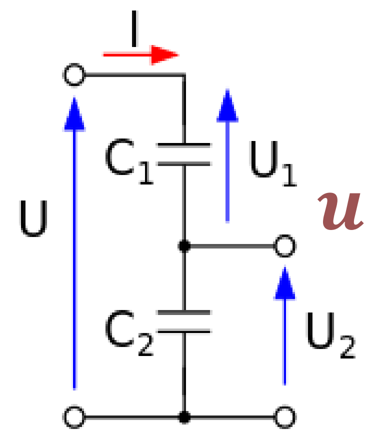
$$\boxed{u_k = \frac{R_k}{R_{eq}} u = \frac{R_k}{\sum_{k=1}^{N} R_k} u}$$

Pont diviseur de tension (2)

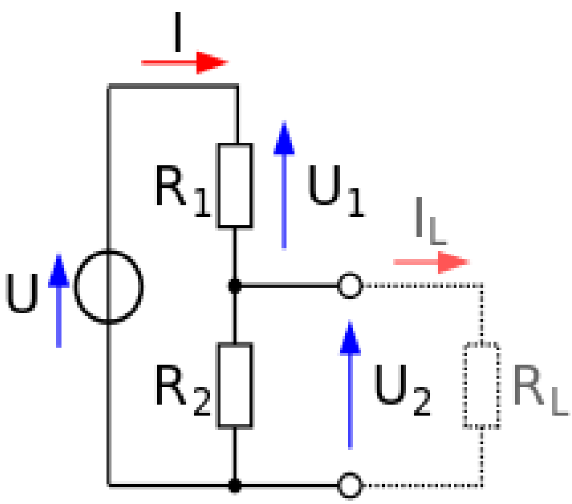


$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u$$

$$u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u$$



$$u_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} u$$



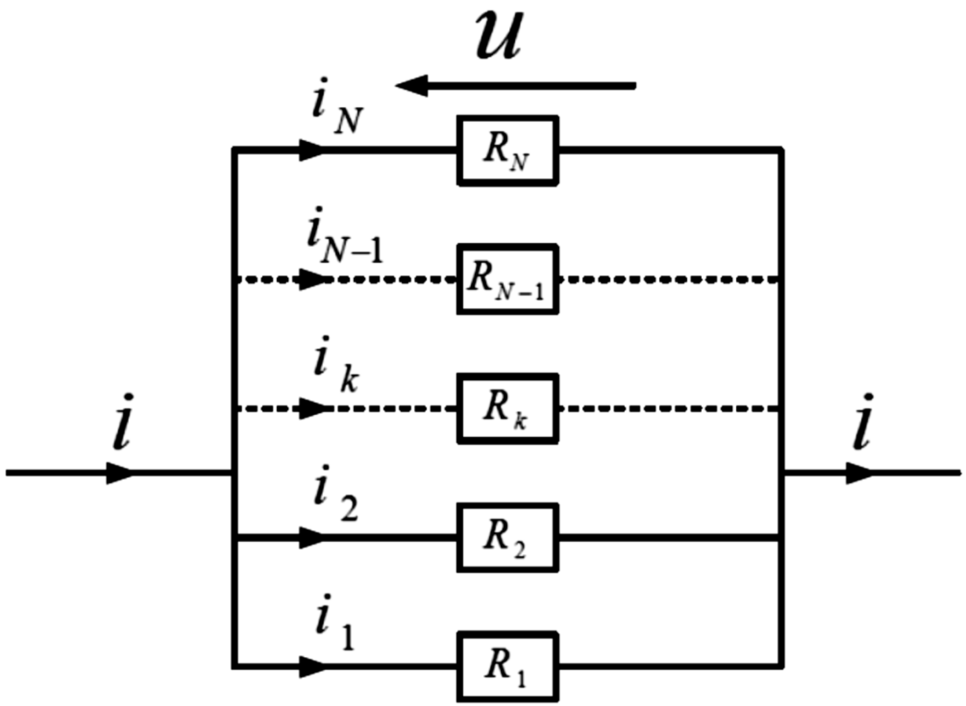
$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_{eq}} u$$

$$u_2 = \frac{R_{eq}}{R_1 + R_{eq}} u$$

$$R_{eq} = R_2 // R_L = \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L}$$

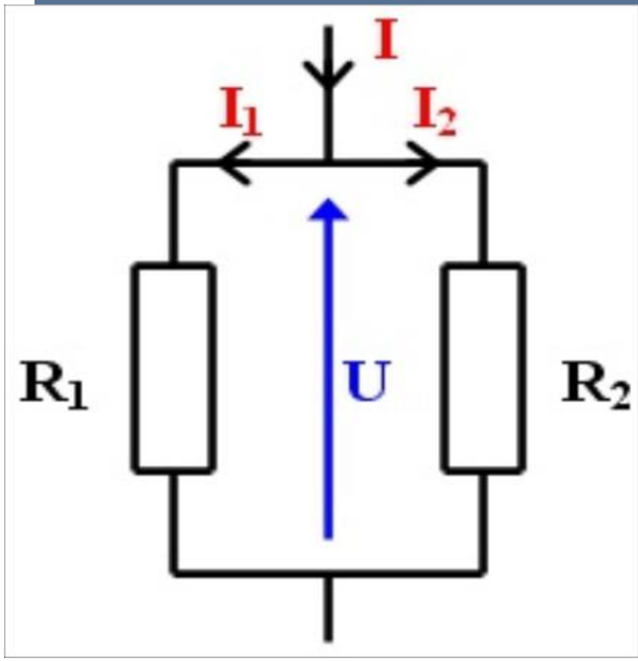
Pont diviseur de courant (1)

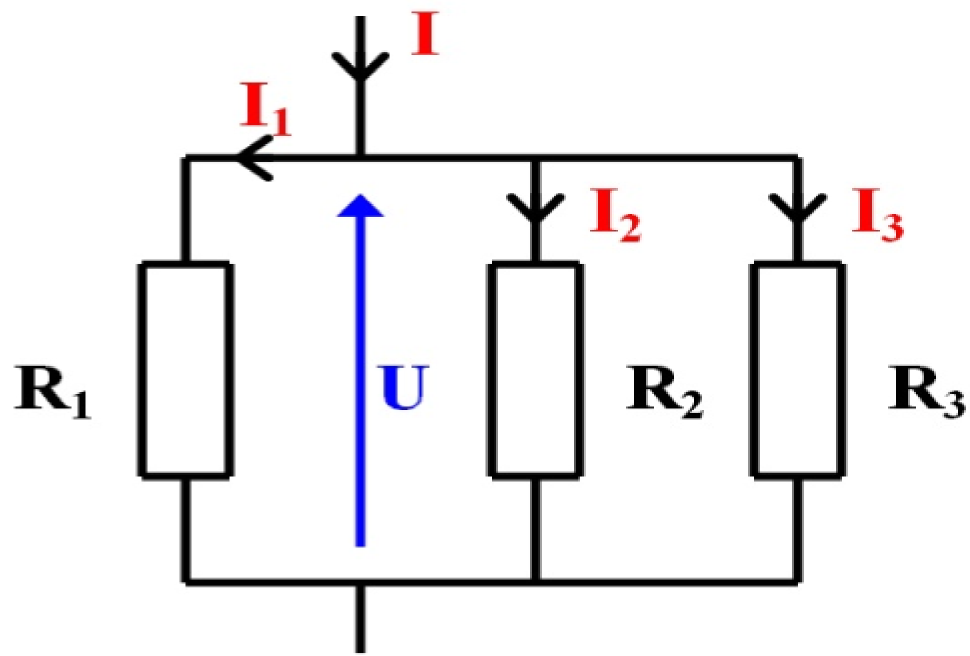
Ce principe est utilisé pour calculer l'intensité du courant parcourant des dipôles placés en dérivation (**donc tous sont soumis à la même ddp**).



$$\boxed{i_k = \frac{R_{eq}}{R_k} i}$$

Pont diviseur de courant (2)





$$i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i$$

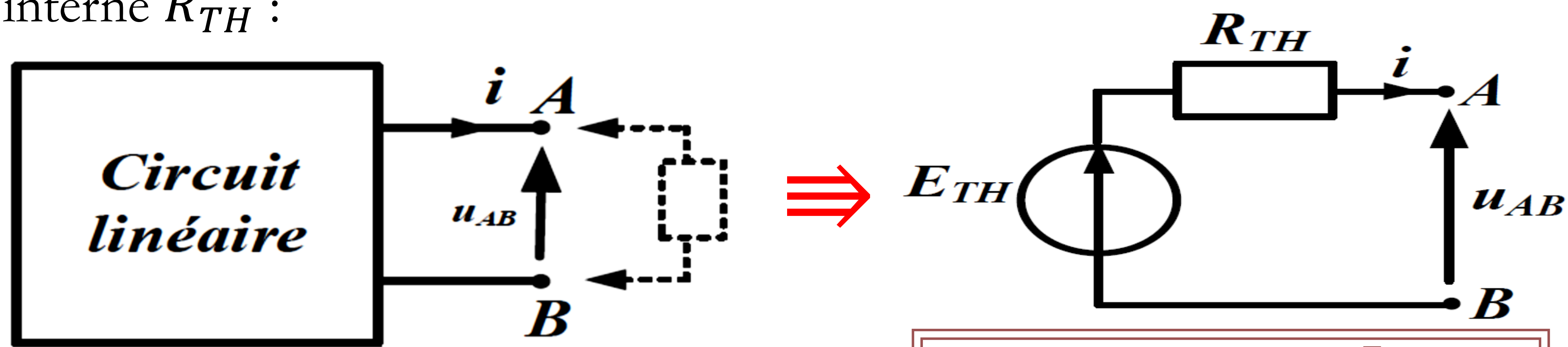
$$i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

$$i_1 = \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} i$$

$$i_2 = \frac{R_1 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} i$$

Représentation de Thevenin

Vis-à-vis des points A et B (c'est-à-dire vu d'un élément placé entre A et B) le circuit suivant peut être remplacé ou modélisé par un générateur équivalent de Thevenin de force électromotrice E_{TH} et de résistance interne R_{TH} :

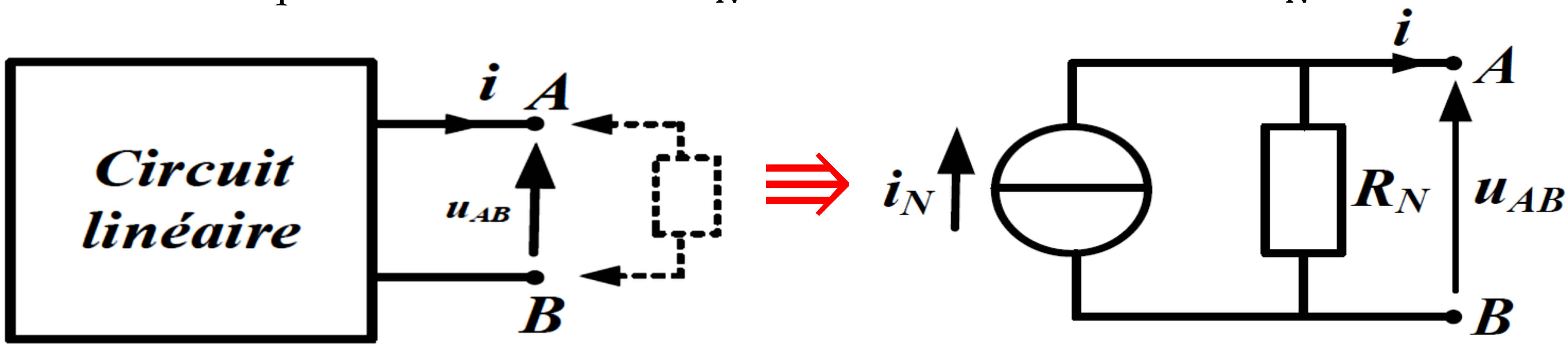


$$\boxed{u_{AB} = E_{TH} - R_{TH} i \Rightarrow i = \frac{E_{TH}}{R_{TH}} - \frac{u_{AB}}{R_{TH}}}$$

☞ **Le but recherché est de remplacer tout réseau électrique (circuit linéaire) , qui alimente par les bornes A et B un dipôle D, par un générateur de tension idéal E_{TH} en série avec une résistance R_{TH}, c'est ce qu'on appelle le modèle équivalent de Thevenin (M.E.T)**

Représentation de Norton

Vis-à-vis des points A et B (c'est-à-dire vu d'un élément placé entre A et B) le circuit précédent peut être remplacé ou modélisé par un générateur de Norton équivalent de courant i_N et de résistance interne R_N :

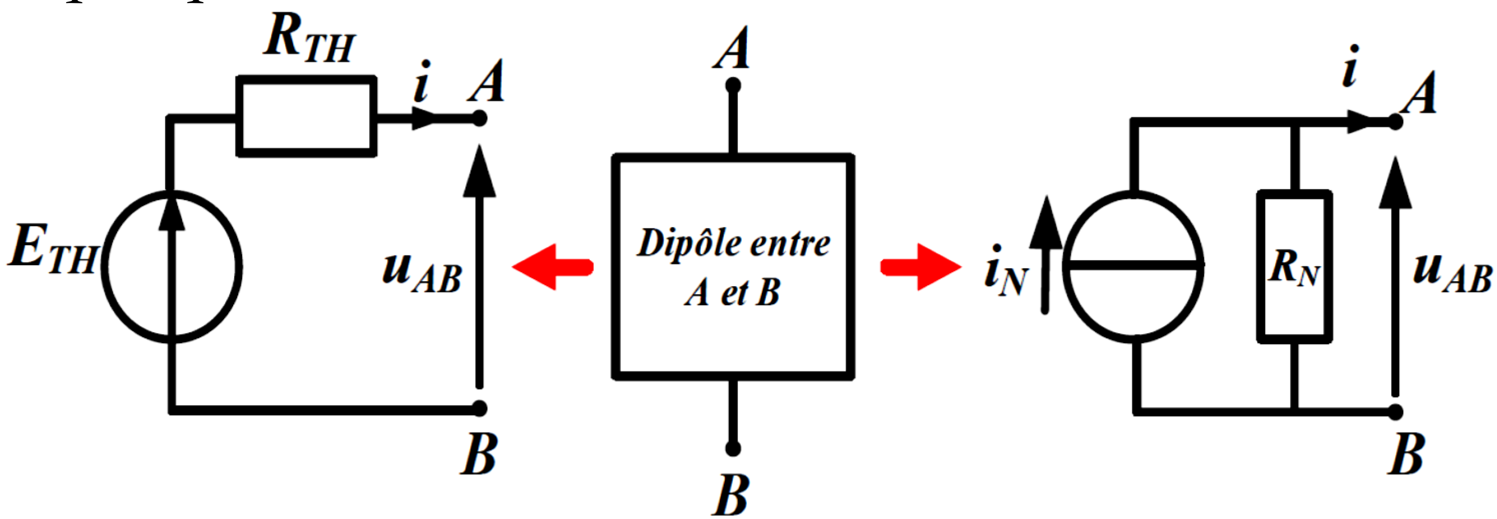


$$\boxed{i = i_N - \frac{U_{AB}}{R_N} = i_N - G_N u_{AB}}$$

☞ **Le but recherché est de remplacer tout réseau électrique (circuit linéaire) , qui alimente par les bornes A et B un dipôle D, par un générateur de courant idéal i_N en parallèle avec une résistance R_N.**

Equivalence Thévenin-Norton

Il existe une équivalence entre les modèles de générateurs (Thévenin et Norton) dans la mesure où le courant i et la tension u_{AB} sont les mêmes quelque soit le circuit linéaire.



$$\boxed{R_N = R_{TH} \quad \text{et} \quad E_{TH} = R_{TH}.i_{TH} = R_{TH}.i_N}$$

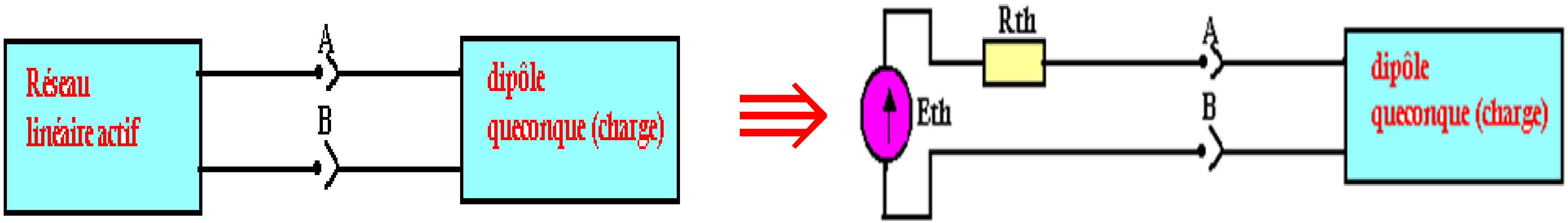
☞ les générateurs de Thévenin et de Norton se déduisent l'un de l'autre.

Théorème de Thévenin (1)

Enoncé du théorème

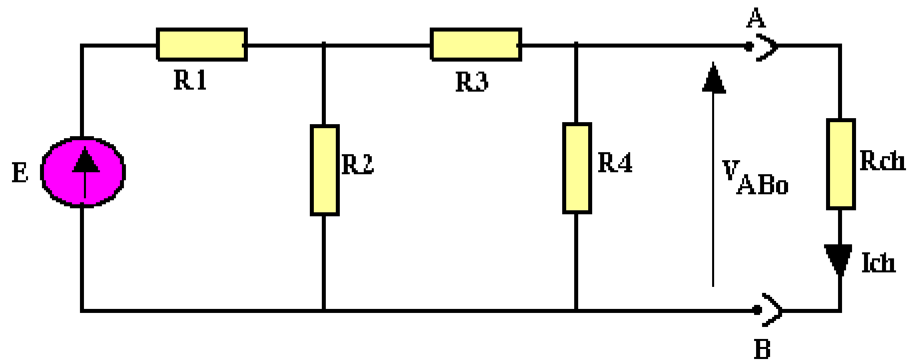
Considérons un circuit électrique linéaire placé entre deux points A et B. Vis-à-vis des points A et B (c'est-à-dire vu d'un élément placé entre A et B), ce circuit peut être remplacé par un générateur équivalent de Thévenin de force électromotrice E_{TH} et de résistance interne R_{TH} :

- **la valeur E_{TH} est égale à la tension mesurée entre A et B à vide**, c'est-à-dire lorsque le dipôle n'est pas connecté à d'autres éléments externes (charge déconnectée).
- la résistance interne R_{TH} correspond à la valeur de la résistance vue entre A et B **lorsque les sources indépendantes sont passivées**.

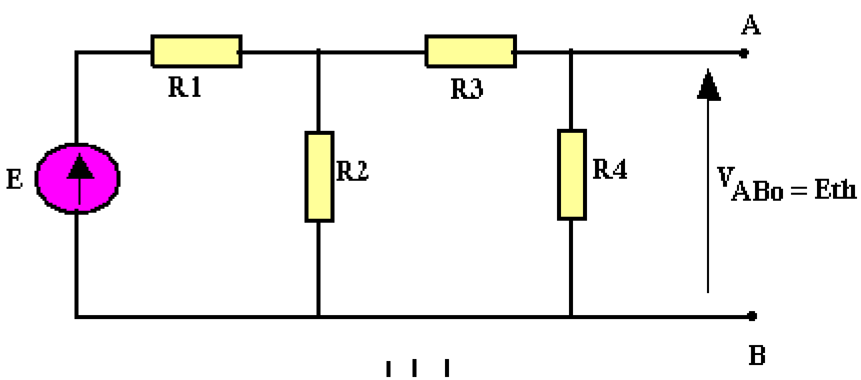


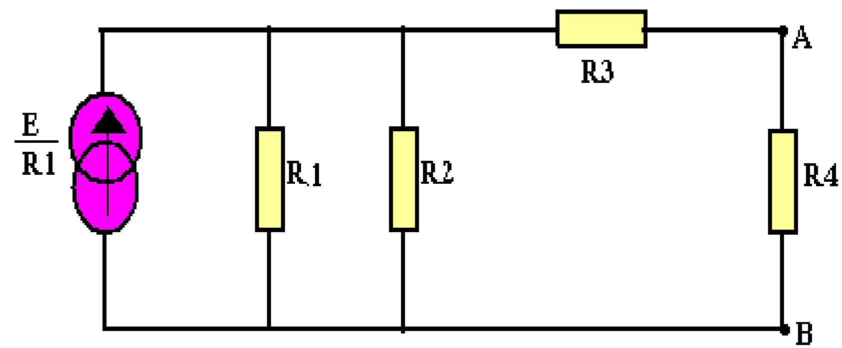
Théorème de Thevenin (2)

Exercice : Par application du théorème de Thevenin, Calculer E_{Th} et R_{Th} vue des bornes A et B. Déduire I_{ch}.

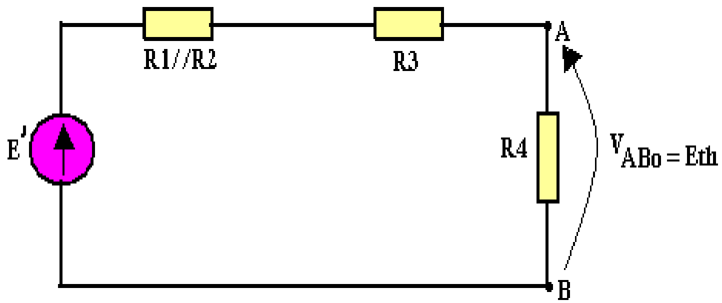


Solution : Calcul de E_{th}





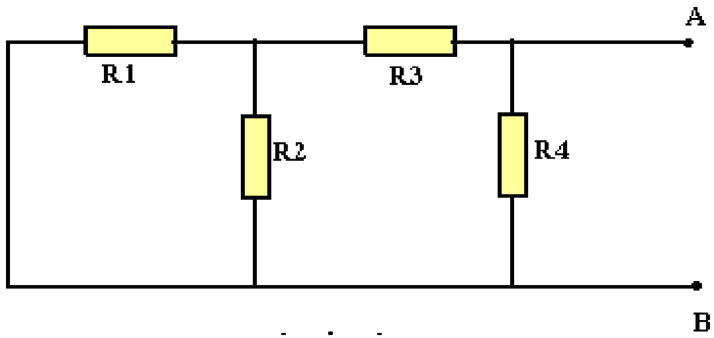
Théorème de Thevenin (3)

⇛ 

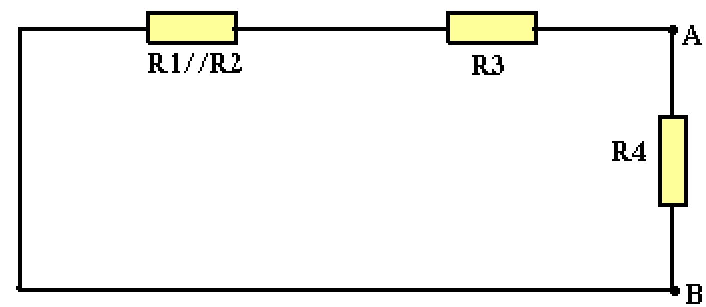
$$V_{AB0} = E_{TH}$$

$$E_{TH} = \frac{R_2R_4}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_1R_3 + R_2R_3 + R_2R_4}E$$

Solution : Calcul de R_{Th}



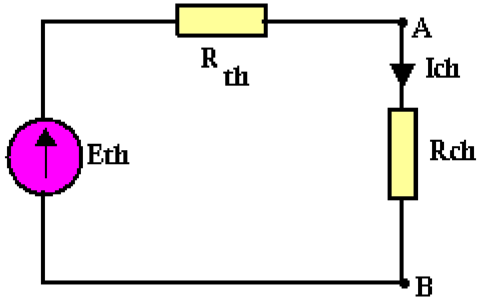
⇛



$$R_{TH} = R_4//(R_1//R_2 + R_3) = \frac{(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)R_4}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_1R_3 + R_2R_3 + R_2R_4}$$

Théorème de Thevenin (4)

Solution : Calcul de I_{ch}

$\Rrightarrow$ 

$$I_{ch} = \frac{E_{TH}}{R_{TH} + R_{ch}}$$

Si $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_{ch} = R$ On a $E_{TH} = \frac{1}{5}E$ et $R_{TH} = \frac{3}{5}R$

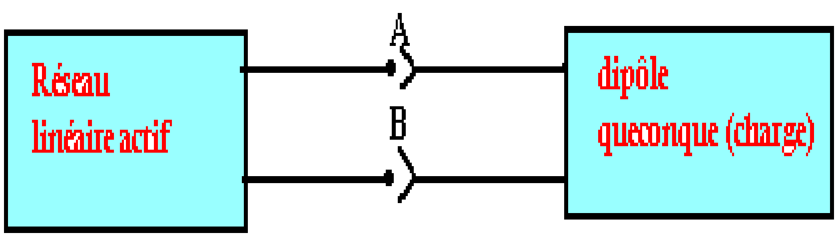
$$\Rrightarrow \quad \boxed{I_{ch} = \frac{E}{8R}}$$

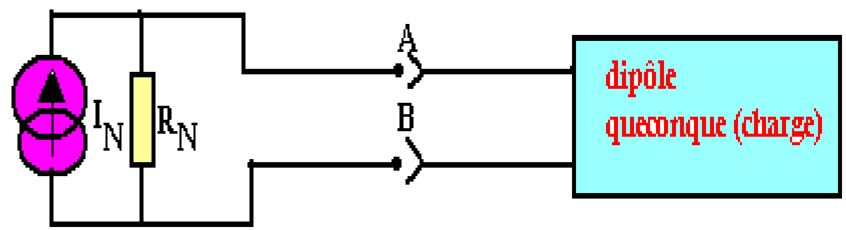
Théorème de Norton (1)

Enoncé du théorème

Tout circuit électrique linéaire peut être remplacé par un dipôle équivalent vis-à-vis des points A et B, c'est-à-dire vu d'un élément placé entre A et B, par un générateur de Norton équivalent de courant i_N et de résistance interne R_N :

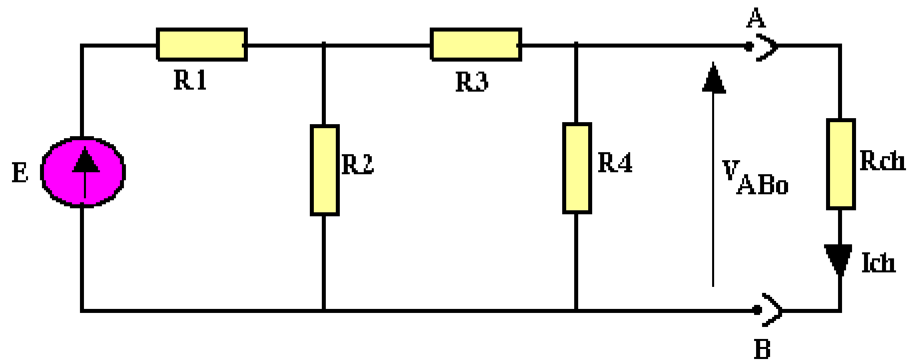
- la valeur i_N du générateur de courant équivalent est égale à l'intensité mesurée entre A et B **dans un court-circuit (charge court-circuitée).**
- la résistance interne R_N correspond à la valeur de la résistance vue entre A et B **lorsque les sources indépendantes sont passivées.**



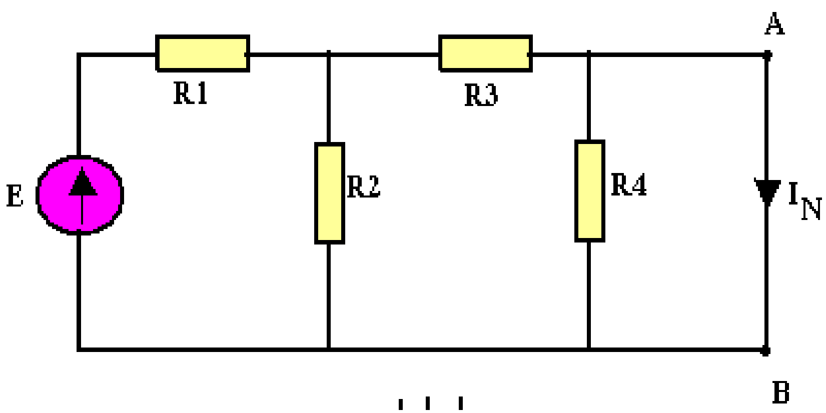


Théorème de Norton (2)

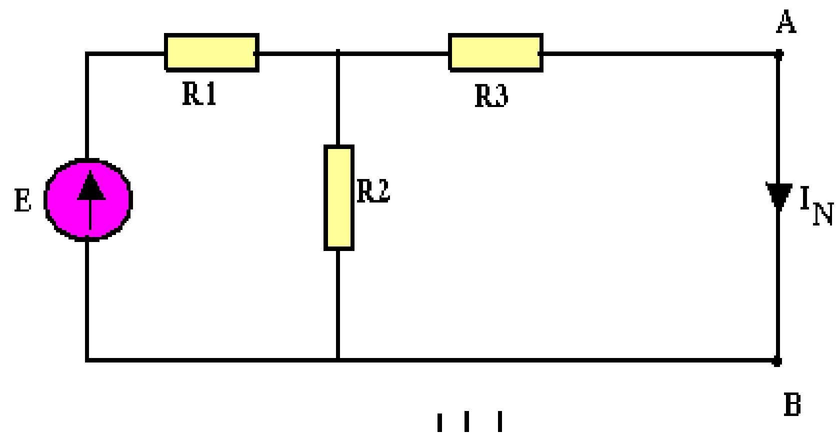
Exercice : Par application du théorème de Norton, Calculer I_N et R_N vue des bornes A et B. Déduire I_{ch}.



Solution : Calcul de I_N

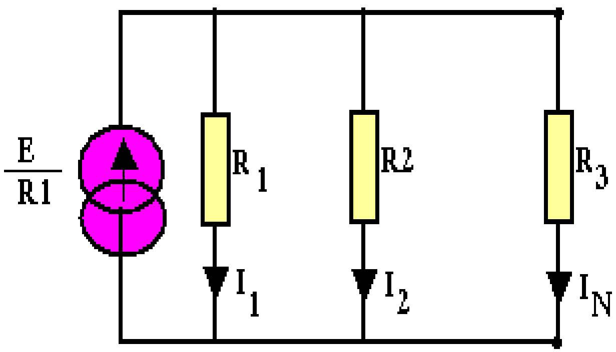


$\Rightarrow$



Théorème de Norton (3)

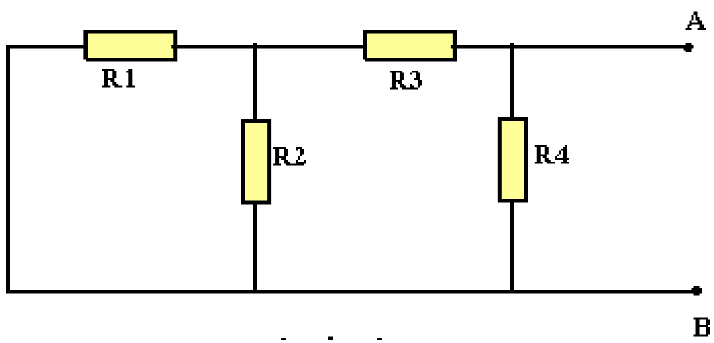
$\Rightarrow$



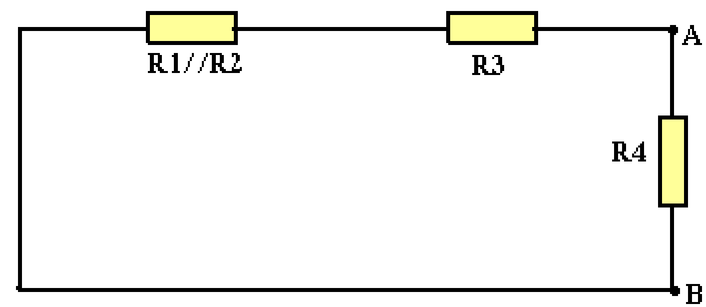
$$I_N = \frac{G_3}{G_1 + G_2 + G_3}\frac{E}{R_1}$$

$$I_N = \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} E$$

<u>Solution</u> : Calcul de R_N



$\Rightarrow$

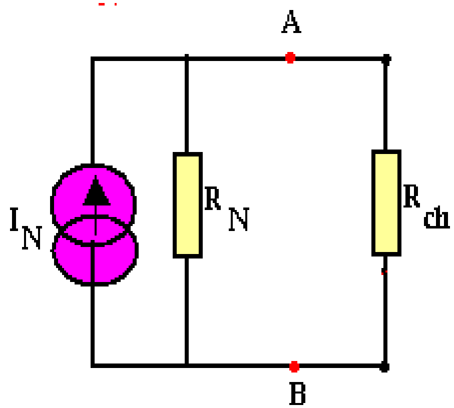


$$R_N = R_4//(R_1//R_2 + R_3) = \frac{(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) R_4}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_2 R_4}$$

Théorème de Norton (4)

Solution : Calcul de I_{ch}

$\Rrightarrow$



$$I_{ch} = \frac{R_N}{R_N + R_{ch}} I_N$$

Si $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_{ch} = R$ On a $I_N = \frac{E}{3R}$ et $R_N = \frac{3}{5} R$

$\Rrightarrow$ $$\boxed{I_{ch} = \frac{E}{8R}}$$

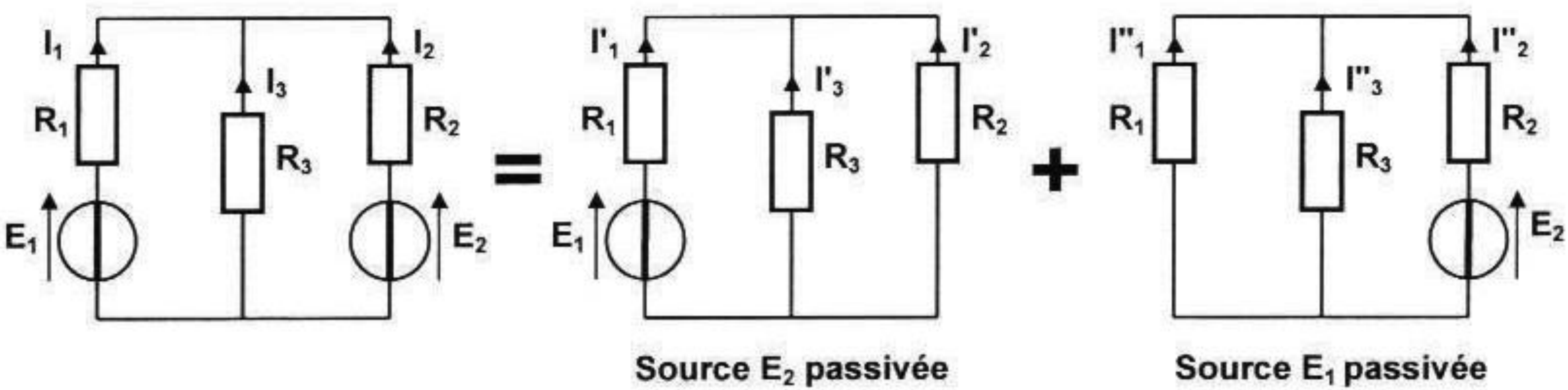
Théorème de Superposition (1)

Enoncé du théorème

Soit un réseau linéaire comportant n sources idéales indépendantes de tension et de courant que nous pouvons noter : S_1, S_2, S_3,……..., S_n et une grandeur à calculer, comme par exemple i_K le courant dans la branche K. Appelons i_{K_1}, i_{K_2}, i_{K_3}, ……., i_{K_n}, les valeurs de cette grandeur crée individuellement dans cette branche par chaque source agissant seule. **Les autres sources étant passivées (éteintes)** et la configuration du réseau restant inchangée. L'expression de la solution générale donnant l'intensité du courant traversant la branche K est :

$$\boxed{\boldsymbol{i_K = i_{K_1} + i_{K_2} + i_{K_3} + \cdots + i_{K_n}}}$$

Théorème de Superposition (2)



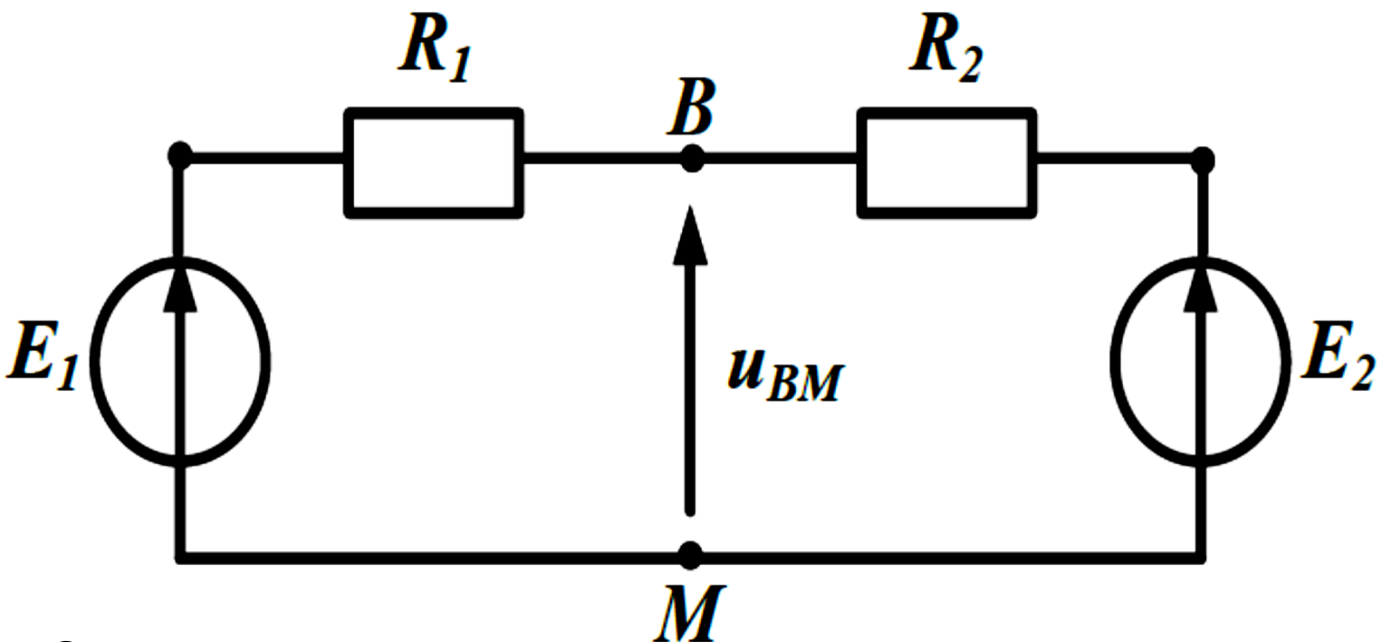
Il faut passiver(éteindre) toutes les sources sauf une et effectuer le calcul de la grandeur : tension aux bornes de la charge (ou l'intensité dans la branche de la charge) , refaire l'opération jusqu'qu'il ait autant de grandeurs calculées que de sources indépendantes.

Pour le cas ci-dessus on peut écrire que :

$$I_1 = I'_1 + I''_1 \qquad I_2 = I'_2 + I''_2 \qquad I_3 = I'_3 + I''_3$$

Théorème de Superposition (3)

<u>Exercice d'application</u>: Calculons la tension u_{BM} dans la figure suivante



- $Si\ E_2 = 0$,

$$u_{BM} = u_{BM_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_1$$

Théorème de Superposition (4)

- $Si\ E_1 = 0$,

$$u_{BM} = u_{BM\,2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E_2$$

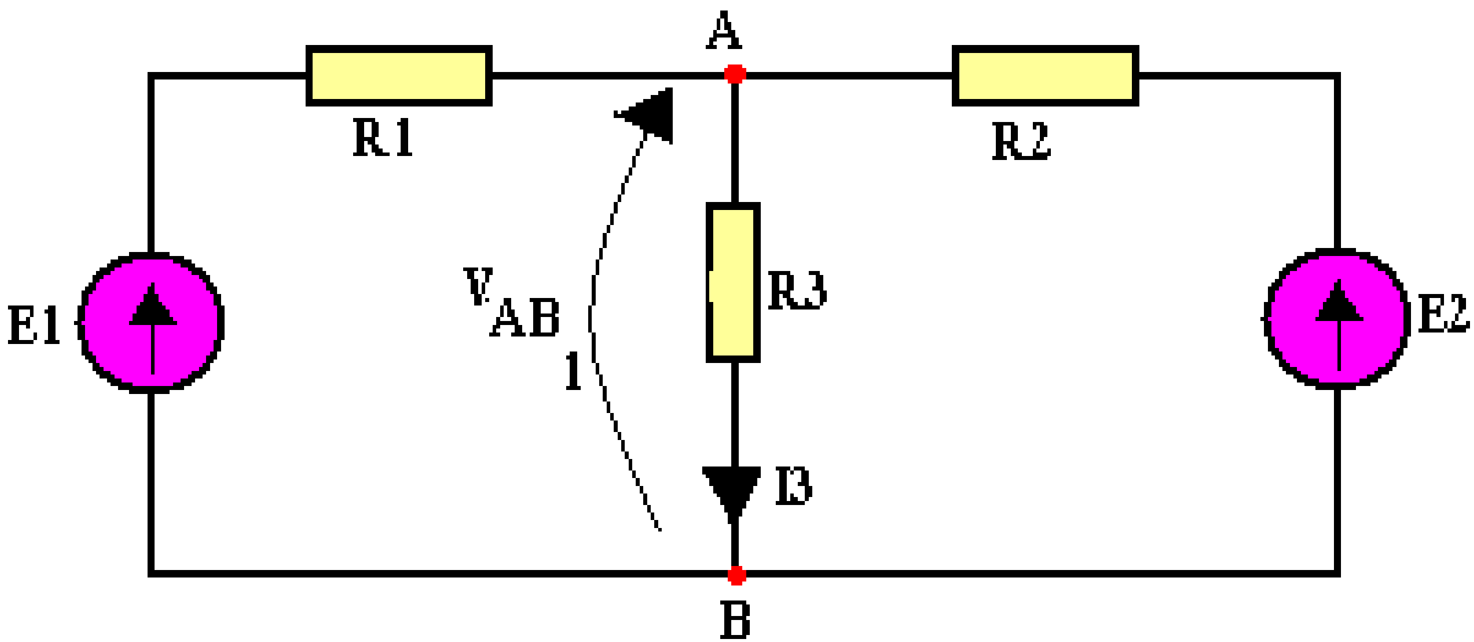
Finalement en tenant compte des deux sources, nous obtenons :

$$\boldsymbol{u_{BM} = u_{BM1} + u_{BM2}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} E_2$$

Théorème de Superposition (3)

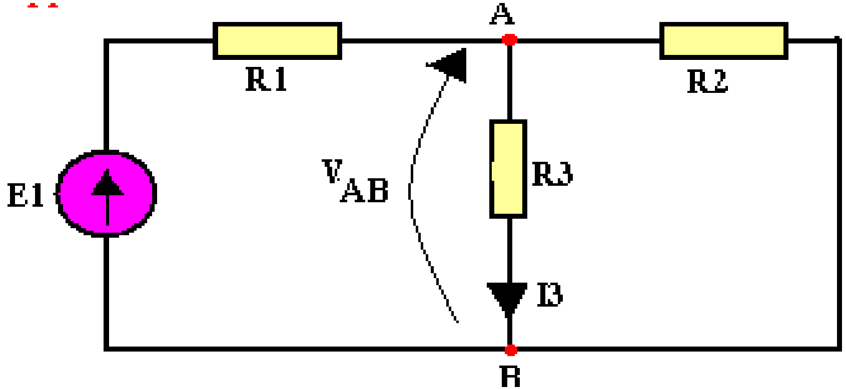
Exercice : Par application du théorème de superposition, Calculer V_{AB} et I_3 . $E_1 = 100V$; $E_2 = 40V$; $R_1 = 10\ \Omega$; $R_2 = 10\ \Omega$;

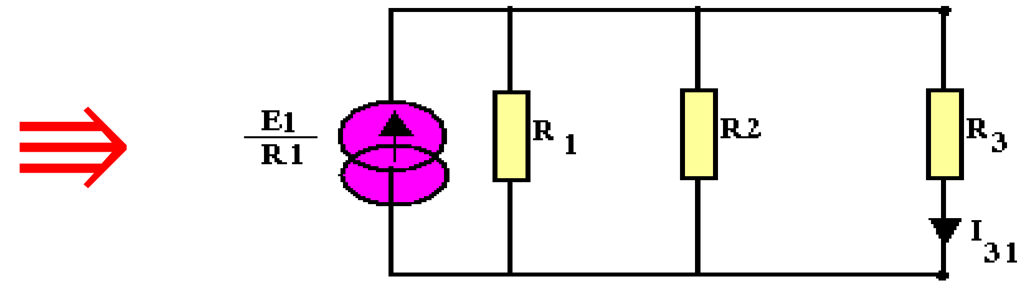
$$R_3 = 5\ \Omega;$$



Théorème de Superposition (4)

Solution : Supposons que $E_2 = 0$ V ;



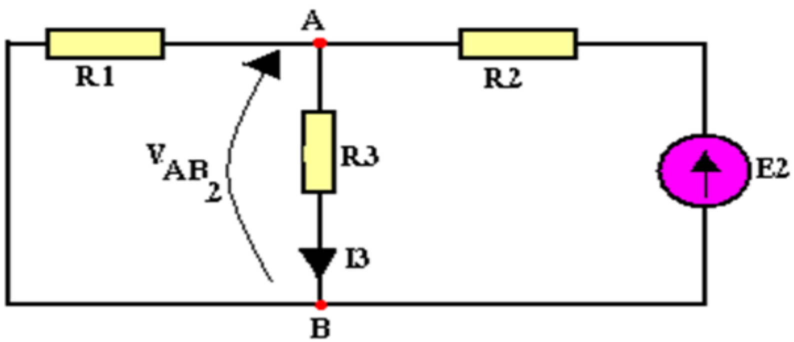


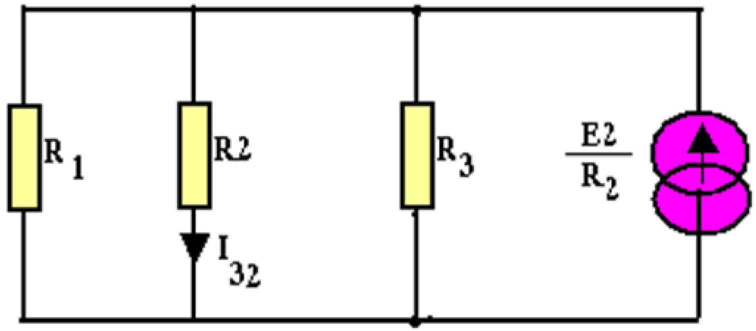
$$I_{31} = \frac{G_3}{G_1 + G_2 + G_3}\frac{E_1}{R_1} = \frac{R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}E_1 = 2,5\ A$$

$$V_{AB_1} = I_{31}R_3 = \frac{R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}E_1 = \frac{50}{200}100 = 25\ V$$

Théorème de Superposition (5)

Solution : Supposons que $E_1 = 0$ V ;





$$I_{32} = \frac{G_3}{G_1 + G_2 + G_3}\frac{E_2}{R_2} = \frac{R_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}E_2 = 2A$$

$$V_{AB_2} = I_{32}R_3 = \frac{R_1R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}E_2 = \frac{400}{200}10 = 20\ V$$

Théorème de Superposition (6)

Finalement on a :

$$I_3 = I_{31} + I_{32} = 2,5 + 2 \Longrightarrow \boxed{\boxed{I_3 = 4,5\ A}}$$

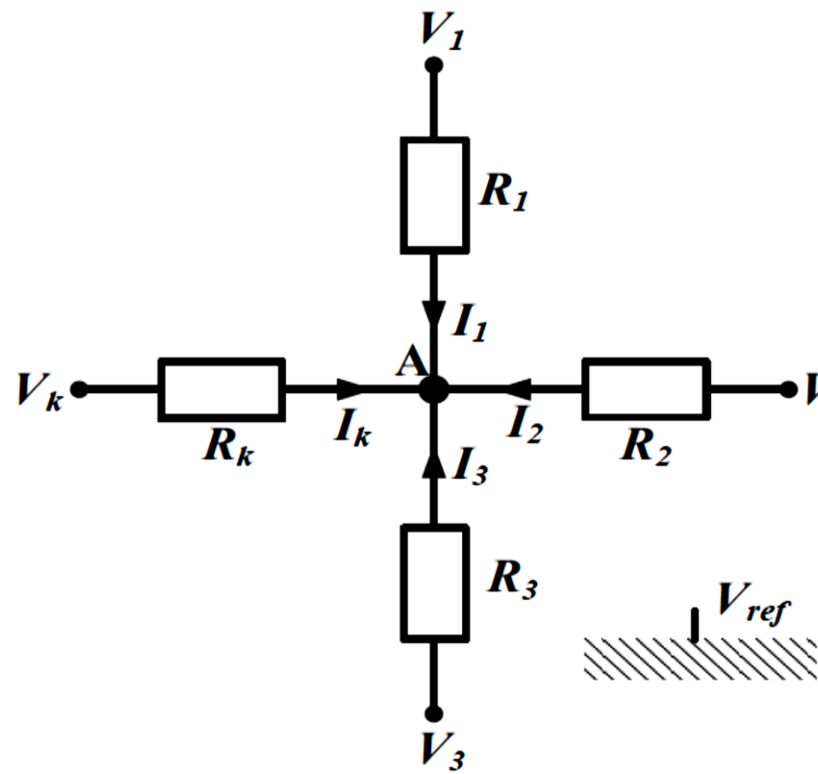
$$V_{AB} = V_{AB_1} + V_{AB_2} = 25 + 20 \Longrightarrow \boxed{\boxed{V_{AB} = 45\ V}}$$

Théorème de Millman (1)

Il est utilisé lorsqu'il s'agit de calculer une tension dans un circuit comprenant plusieurs sources de tension.

On considère un nœud A auquel aboutissent k branches (figure ci-contre). Les potentiels V_i des extrémités sont tous définis par rapport à un même potentiel de référence V_{ref}. R_i est la résistance dans la branche i et G_i sa conductance. La loi des nœuds s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{k} I_i = I_1 + I_2 + \cdots + I_k = 0$$



Théorème de Millman (2)

Cette loi des nœuds peut s'écrire aussi :

$$\frac{V_1 - V_A}{R_1} + \frac{V_2 - V_A}{R_2} + \cdots + \frac{V_k - V_A}{R_k} = 0$$

En remplaçant chaque résistance par la conductance, il vient :

$$(V_1 - V_A).G_1 + (V_2 - V_A).G_2 + \cdots + (V_k - V_A).G_k = 0$$

En développant chaque terme on a :

$$V_1.G_1 + V_2.G_2 + \cdots + V_k.G_k = V_A.G_1 + V_A.G_2 + \cdots + V_A.G_k$$

Ce qui donne :

$$\sum_{i=1}^{k} V_i G_i = V_A \sum_{i=1}^{k} G_i$$

Théorème de Millman (3)

Le théorème de MILLMAN stipule que la tension mesurée au nœud A est donc égale au produit de la résistance équivalente par la valeur de la source de courant, soit :

$$\boxed{V_A = \sum_{i=1}^{k} V_i G_i \Big/ \sum_{i=1}^{k} G_i = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \cdots + \frac{V_k}{R_k}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_k}}}$$

Lorsque les branches comportent des générateurs de tension, on peut aussi écrire :

$$\boxed{V_A = \sum_{i=1}^{k} E_i G_i \Big/ \sum_{i=1}^{k} G_i = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \cdots + \frac{E_k}{R_k}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_k}}}$$

Théorème de Millman (4)

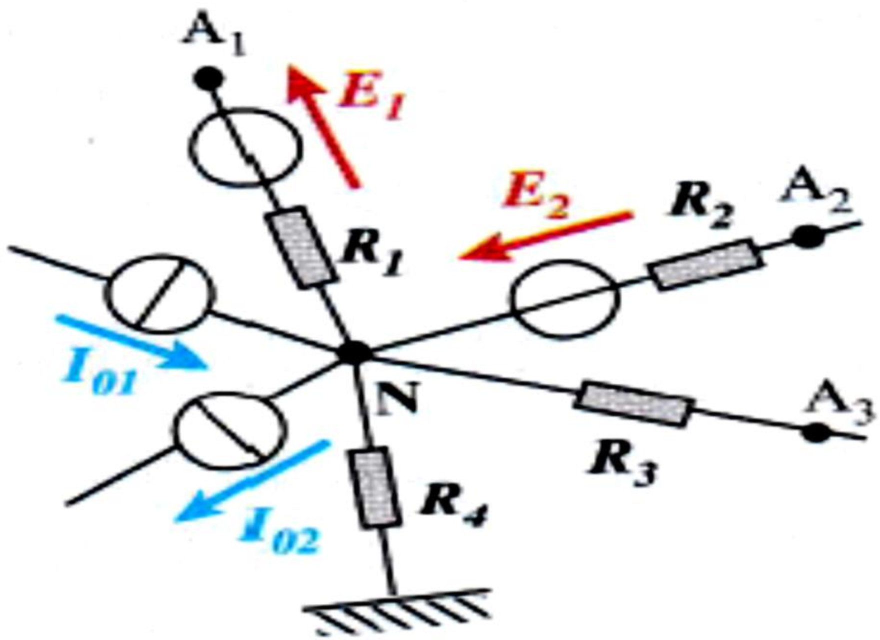
Le potentiel au nœud N où arrivent m fils de bornes A_k et N, comportant chacun une résistance R_k et une fem E_k et n fils comportant des generateurs de courant de cém I_{0j} s'ecrit:

$$\boxed{V_N = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{V_{A_k}}{R_k} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon_k E_k}{R_k} + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_k I_{0\,j}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{R_k}}}$$

Où $\varepsilon_j = +1$ si le courant I_{0j} arrive au nœud, -1 sinon

et $\varepsilon_k = +1$ si la fem E_k est orientée vers le nœud, -1 sinon

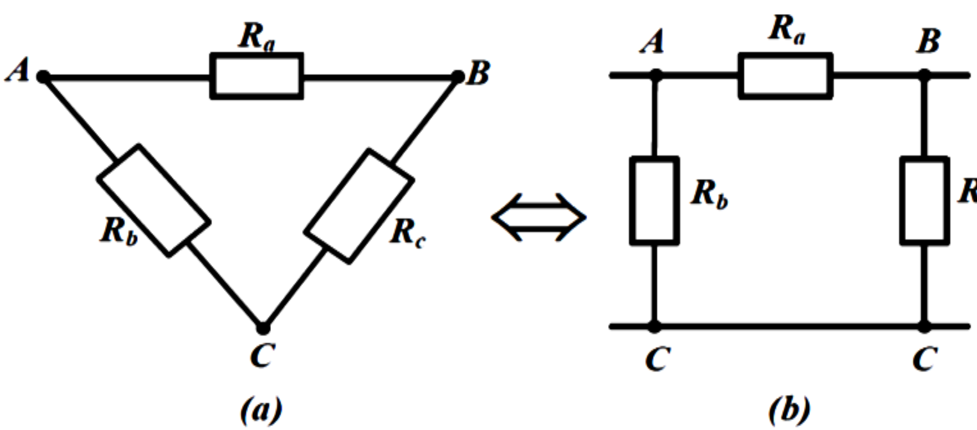
Théorème de Millman (5)

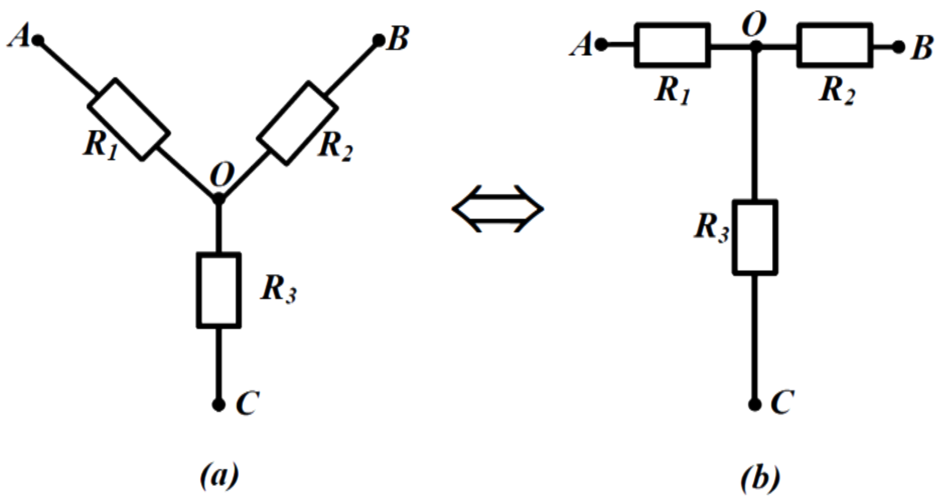


$$V_N = \frac{\dfrac{V_{A_1}}{R_1} - \dfrac{E_1}{R_1} + \dfrac{V_{A_2}}{R_2} + \dfrac{E_2}{R_2} + \dfrac{V_{A_3}}{R_3} + I_{01} - I_{02}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4}}$$

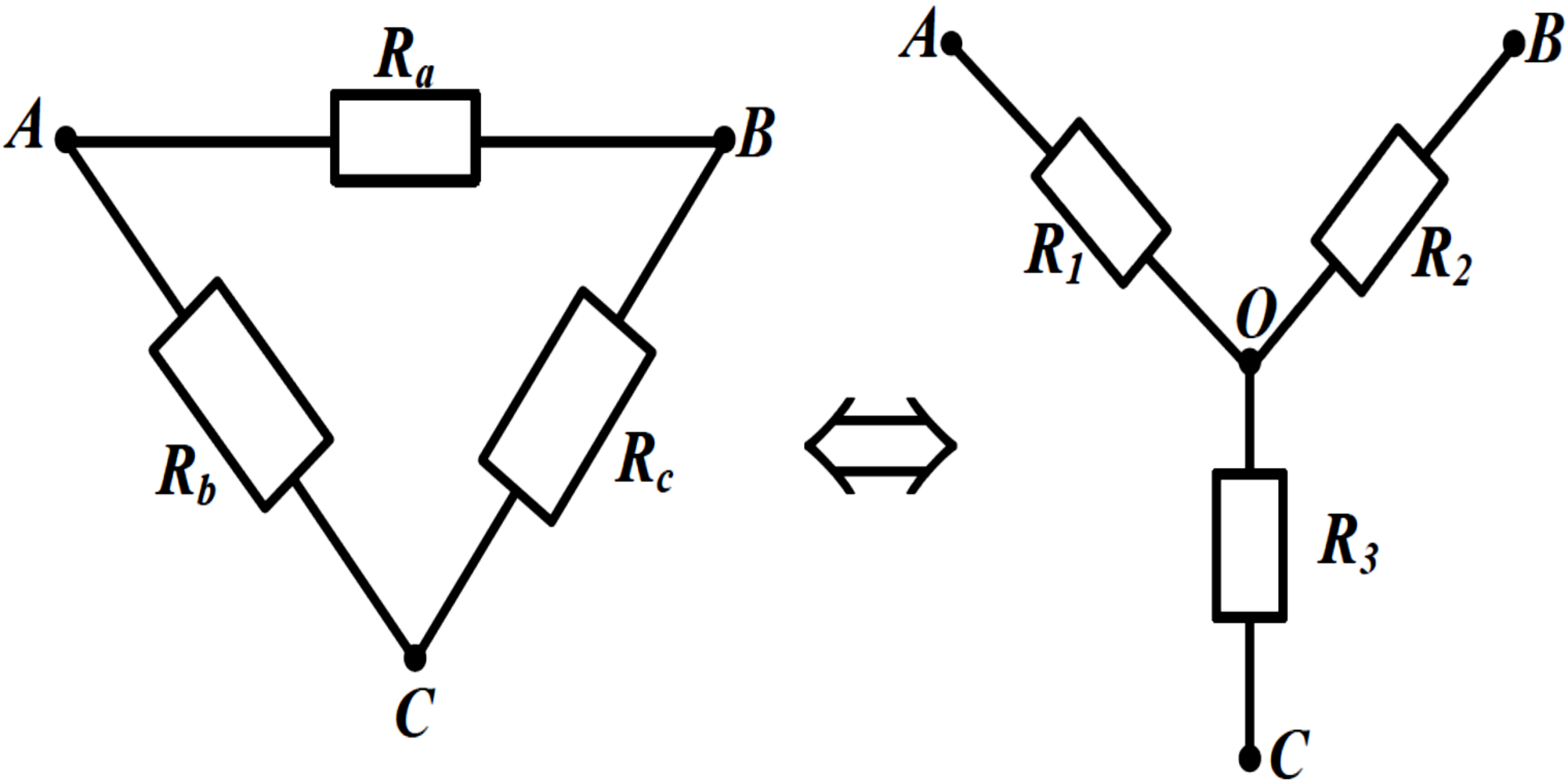
Théorème de Kennely (1)

Ce théorème permet de **transformer le schéma d'un réseau en triangle (ou en π) en un schéma en étoile (ou en T, ou en Y)** qui est souvent beaucoup plus facile à étudier. Cette transformation est souvent appelée aussi transformation triangle-étoile.





Théorème de Kennely (2)



Théorème de Kennely (3)

Relations de passage du triangle à l'étoile

On connaît les résistances $\boldsymbol{R_a}$, $\boldsymbol{R_b}$ et $\boldsymbol{R_c}$ du triangle. On veut passer à l'étoile ; pour cela on doit connaître les résistances $\boldsymbol{R_1}$, $\boldsymbol{R_2}$ et $\boldsymbol{R_3}$. **Chaque résistance de l'étoile est égale au produit des deux résistances du triangle qui l'encadrent divisé par la somme des résistances du triangle**. Il vient donc :

$$\boxed{R_1 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}}$$

$$\boxed{R_2 = \frac{R_a R_c}{R_a + R_b + R_c}}$$

$$\boxed{R_3 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}}$$

Théorème de Kennely (3)

Relations de passage de l'étoile au triangle

On connaît les résistances $\boldsymbol{R_1}$, $\boldsymbol{R_2}$ et $\boldsymbol{R_3}$ de l'étoile. On veut passer au triangle ; pour cela on doit connaître les résistances $\boldsymbol{R_a}$, $\boldsymbol{R_b}$ et $\boldsymbol{R_c}$. Chaque conductance du triangle est égale au produit des deux conductances de l'étoile qui l'encadrent divisé par la somme des conductances de l'étoile. Il vient donc :

$$\boxed{\boldsymbol{R_a = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_3}}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{R_b = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_2}}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{R_c = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_1}}}$$